

利用能量守恒和径向基函数插值的 流固耦合界面数据传递方法

苏波^{1,2}, 钱若军¹, 袁行飞³, 于猛¹

(1. 同济大学土木工程学院, 200092, 上海; 2. 江苏大学理学院, 212013, 江苏镇江;
3. 浙江大学土木工程学院, 310027, 杭州)

摘要: 根据界面能量守恒原理, 将径向基函数(RBF)引入流固耦合分析领域, 提出了基于 RBF 插值的流固耦合界面数据传递方法(RBF/FSI). 推导了界面位移传递矩阵, 并根据 RBF/FSI 算法编制了相应的界面信息传递的计算程序. 以三维耦合界面的位移信息传递为例, 将数值计算结果和解析解进行了对比分析, 结果表明, RBF/FSI 算法计算效率高, 计算结果准确, 适合处理复杂耦合界面的流固耦合信息传递. 此外, RBF/FSI 算法允许 CSD(计算结构力学)、CFD(计算流体力学)采用任意网格形式, 因此在 CSD 和 CFD 计算程序之间可以开发独立的界面信息传递接口程序, 很容易实现弱耦合分析.

关键词: 流固耦合; 数据传递; 径向基函数; 能量守恒

中图分类号: TU311.3; O242.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)09-0114-06

Data Exchange Method for Fluid-Structure Interaction Based on Energy Conservation and Interpolation Algorithm Adopting Radial Basis Function

SU Bo^{1,2}, QIAN Ruojun¹, YUAN Xingfei³, YU Meng¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China; 3. College of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Following the principle of energy conservation, a method adopting radial basis function (RBF) is proposed to perform fluid-structure interaction (FSI) analysis. The displacement transfer matrix $\mathbf{H}$ is deduced and a corresponding program by RBF/FSI algorithm is developed. Taking displacement data exchange with 3D interface as an example, the numerical solution by RBF/FSI method is compared with the analytical one. The result shows that RBF/FSI method is efficient and accurate, and is suitable for FSI data exchange on complicated interface. Moreover, the method allows CSD(Computational Structural Dynamics) and CFD(Computational Fluid Dynamics) to choose arbitrary grid form to easily realize loose coupling method by developing an independent interface program between CSD and CFD solvers.

Keywords: fluid-structure interaction; data exchange; radial basis function; energy conservation

通常情况下 CFD(计算流体力学)计算所要求的网格密度要比 CSD(计算结构力学)的大得多, 由此产生流固耦合界面上 2 套非匹配网格之间的数据

传递问题, 因此寻求一种合理有效的数据交换方法是实现流固耦合分析的关键. 近年来, 数学界对以径向基函数(RBF)为基础的近似方法进行了大量的研

究,其中 Buhmann^[1]和吴宗敏^[2-3]对 RBF 的基础理论和应用研究起了重要的推动作用.将 RBF 应用于工程实践计算具有重要意义,目前主要有 2 个应用领域:无网格法求解偏微分方程和大型散乱数据的处理.前者可以用来求解固体或流体控制方程,后者可应用于地形学、医学、计算机图形学等领域. Frank^[4]曾对散乱数据的各种插值方法做了实例比较,得到的结论是,径向基函数插值的结果最能使人满意.

本文将 RBF 引入流固耦合分析领域,根据能量守恒原理,阐述如何采用 RBF 插值进行界面信息传递,并利用本文提出的 RBF/FSI 算法编制了相应的计算程序,对三维耦合界面上的位移信息传递进行了计算分析.

1 界面信息传递能量守恒原理

耦合界面的能量守恒原理是指在耦合作用过程中,耦合界面上流体荷载(外力)、固体力(内力)在界面位移上所做的虚功相等^[5-7],即

$$\delta W = \delta \mathbf{u}_s^T \cdot \mathbf{f}_s = \delta \mathbf{u}_f^T \cdot \mathbf{f}_f \quad (1)$$

式中: $\delta \mathbf{u}_s$ 、 $\delta \mathbf{u}_f$ 分别为耦合界面上固体、流体的虚位移; $\mathbf{f}_s$ 、 $\mathbf{f}_f$ 分别为耦合界面上固体、流体的表面力.耦合界面上流体、固体虚位移之间的关系可表示为

$$\delta \mathbf{u}_f = \mathbf{H} \delta \mathbf{u}_s \quad (2)$$

式中: $\mathbf{H}$ 为界面位移传递矩阵,可由不同计算方法得到,本文采用基于 RBF 插值的计算方法.

将式(2)代入式(1),可得压力传递计算公式

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{f}_f \quad (3)$$

根据式(1)~式(3),可知 $\mathbf{H}$ 的求解至关重要.

2 RBF 插值函数及其定解条件

2.1 RBF 插值函数

在 d 维欧几里德空间给定一组位置不同的点 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N\} \subseteq R^d$,称之为“中心点”.进一步,如果知道在这些中心点上的标量值 $g_1, g_2, \dots, g_N$,可以由此确定一个连续函数,使函数通过这些中心点,当连续函数采用式(4)表示的形式时,称之为 RBF 插值函数

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + p(\mathbf{x}) \quad (4)$$

式中: $s(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 点处的未知函数值; $\mathbf{x}$ 为未知点坐标

(x, y, z) ; $\mathbf{x}_i$ 为第 i 已知数据点坐标 (x_i, y_i, z_i) ; ϕ 为选用的径向基函数; α_i 为相应于第 i 个数据点的待求系数; $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ 为欧几里得距离,对于三维空间可用 r 直接表示为

$$r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2} \quad (5)$$

$p(\mathbf{x})$ 为低阶 d 维多项式,对于小于等于 2 阶的有条件正定基函数, $p(\mathbf{x})$ 可以采用线性多项式^[1]

$$p(\mathbf{x}) = \gamma_0 + \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z \quad (6)$$

2.2 RBF 插值函数的定解条件

式(4)中的系数 α_i 和 $p(\mathbf{x})$ 可以根据式(7)和式(8)的定解条件求得

$$s(\mathbf{x}_i) = g_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i q(\mathbf{x}) = 0 \quad (8)$$

式中:多项式 $q(\mathbf{x})$ 为满足 $\deg(q(\mathbf{x})) \leq \deg(p(\mathbf{x}))$ 的所有多项式.

3 界面位移传递矩阵的计算

在流固耦合界面上,固体域上存在 N_s 个固体节点

$$\mathbf{x}_{si} = (x_{si}, y_{si}, z_{si}) \in R^3 \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (9)$$

流体域上存在 N_f 个流体节点

$$\mathbf{x}_{fi} = (x_{fi}, y_{fi}, z_{fi}) \in R^3 \quad i = 1, 2, \dots, N_f \quad (10)$$

$\mathbf{d}_s$ 、 $\mathbf{d}_f$ 分别表示固体、流体边界节点的位移矢量,位移传递的目标旨在用 $\mathbf{d}_s(\mathbf{x}_{si})$ 表示 $\mathbf{d}_f(\mathbf{x}_{fi})$.

将式(9)代入式(7),并考虑式(8),经过简单的计算处理, N_s 个固体节点位移 $\mathbf{d}_s$ 在 x 方向的位移分量 $\mathbf{d}_{sx}$ 可用下式表示

$$\mathbf{D}_{sx} = \mathbf{C}_{ss} \boldsymbol{\alpha}_x \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{D}_{sx} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{d}_{sx} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_{sx} = \begin{bmatrix} d_{s1} \\ \vdots \\ d_{sN_s} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}_x = \begin{bmatrix} \gamma_0^x \\ \gamma_x^x \\ \gamma_y^x \\ \gamma_z^x \\ \alpha_{s1}^x \\ \vdots \\ \alpha_{sN_s}^x \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_{ss} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{sN_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sN_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{s1} & z_{s2} & \cdots & z_{sN_s} \\ 1 & x_{s1} & y_{s1} & z_{s1} & \phi_{s11} & \phi_{s12} & \cdots & \phi_{s1N_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{sN_s} & y_{sN_s} & z_{sN_s} & \phi_{sN_s1} & \phi_{sN_s2} & \cdots & \phi_{sN_sN_s} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\phi_{s12} = \phi(\|x_{s1} - x_{s2}\|) \quad (14)$$

基函数为节点 1 和 2 间的距离函数,余同。

根据式(11),即可求得系数 α_x

$$\alpha_x = \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{D}_{sx} \quad (15)$$

为确定流体表面节点的位移,首先建立如下点位移矩阵

$$\mathbf{A}_{fs} = \begin{bmatrix} 1 & x_{f1} & y_{f1} & z_{f1} & \phi_{f1,s1} & \phi_{f1,s2} & \cdots & \phi_{f1,sN_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{fN_f} & y_{fN_f} & z_{fN_f} & \phi_{fN_f,s1} & \phi_{fN_f,s2} & \cdots & \phi_{fN_f,sN_s} \end{bmatrix} \quad (16)$$

流体表面节点的位移 d_{fx} 可以表示为

$$d_{fx} = \mathbf{A}_{fs} \alpha_x = \mathbf{A}_{fs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{D}_{sx} \quad (17)$$

式(17)可进一步处理,因为矩阵 $\mathbf{C}_{ss}$ 有零块,将之进行分块处理

$$\mathbf{C}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (18)$$

矩阵 α_x 可以分解成 2 部分, $\alpha_x = \begin{bmatrix} \alpha_x^{\text{PLY}} \\ \alpha_x^{\text{RBF}} \end{bmatrix}$, 其中 α_x^{PLY} 、

α_x^{RBF} 分别表示为

$$\alpha_x^{\text{PLY}} = \begin{bmatrix} \gamma_0^x \\ \gamma_x^x \\ \gamma_y^x \\ \gamma_z^x \end{bmatrix}; \quad \alpha_x^{\text{RBF}} = \begin{bmatrix} \alpha_{s1}^x \\ \alpha_{s2}^x \\ \vdots \\ \alpha_{sN_s}^x \end{bmatrix} \quad (19)$$

上标 PLY、RBF 分别表示属于多项式 $p(x)$ 和 RBF 插值函数中的系数。

将式(17)写成分块矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^{\text{PLY}} \\ \alpha_x^{\text{RBF}} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{ss}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_{sx} \end{bmatrix} \quad (20)$$

经过矩阵运算,可求得

$$\alpha_x^{\text{PLY}} = \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{d}_{sx} \quad (21)$$

$$\alpha_x^{\text{RBF}} = (\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{d}_{sx} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{M}_p = (\mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^T)^{-1}$ 。

由式(17)可得

$$d_{fx} = \mathbf{A}_{fs} \alpha_x = \mathbf{A}_{fs} \begin{bmatrix} \alpha_x^{\text{PLY}} \\ \alpha_x^{\text{RBF}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{fs} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{d}_{sx} \quad (23)$$

式(23)建立了流体节点位移和固体节点位移间的关系,因此传递矩阵 $\mathbf{H}$ 可直接写为

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_{fs} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_p \mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

类似地,流体表面 y, z 方向的节点位移 d_{fy}, d_{fz} 也可由固体表面 y, z 方向的节点位移 d_{sy}, d_{sz} 左乘以传递矩阵 $\mathbf{H}$ 求得,写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} d_{fx} \\ d_{fy} \\ d_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \\ & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{sx} \\ d_{sy} \\ d_{sz} \end{bmatrix} \quad (25)$$

得到传递矩阵 $\mathbf{H}$ 后,根据能量守恒原理即可编制相应的计算程序,对流固耦合界面的位移、速度、压力等物理量进行传递。

4 RBF 插值函数在流固耦合界面信息传递中的应用条件

RBF 插值函数应用于流固耦合信息传递是一种整体插值的方法,对数据点来源并无特殊要求,可以是规则网格数据点(如有限元网格节点),也可以是无规则的散乱点。因此,在使用网格化方法时,CFD 和 CSD 可以保持相对的独立性,这有利于独立耦合界面信息程序的开发。

如式(24)所示,采用 RBF 插值函数进行数据传递时涉及传递矩阵 $\mathbf{H}$ 的计算,其中包括矩阵 $\mathbf{M}$ 的求逆运算,只要 $\mathbf{M}$ 是非奇异矩阵,就可采用 RBF 插值函数进行信息传递。根据文献[8]中关于 RBF 插值函数存在性的相关定理,当 RBF 函数 ϕ 为正定函数或条件正定函数时,对于两两不同的数据点, $\mathbf{M}$ 为非奇异矩阵。

5 算例分析:三维壳体耦合界面的位移传递

如图 1 所示,耦合界面为一半圆柱壳体曲面,计算域取 $0 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ 。

假定界面在 x 方向的位移场可分别由以下的解析式表示[9]

$$d_x(x, y) = 3[1 + \cos((x - 0.5)\pi)][1 + \cos((y - 1)\pi)][1 + \cos((z - 1)\pi)] + 0.5 \quad (26)$$

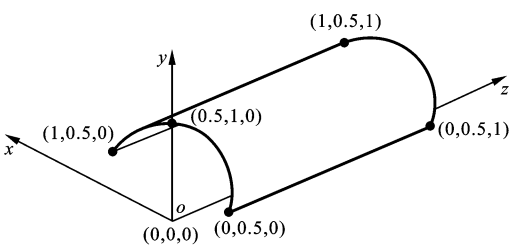
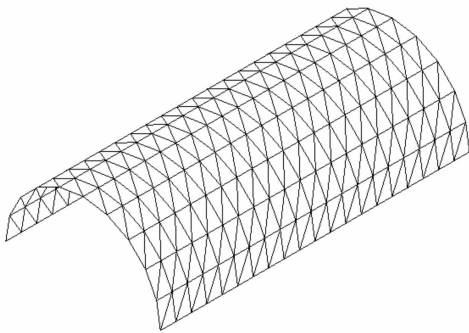


图 1 半圆柱壳体曲面几何

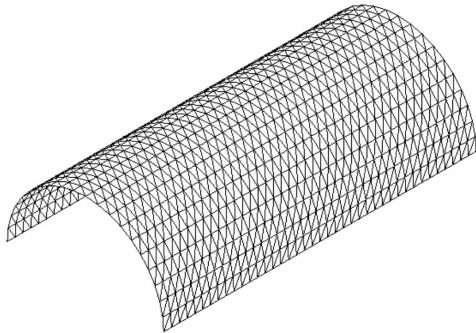
$$d_y(x,y) = 2[1 + \cos((x - 0.5)\pi)][1 + \cos((y - 1)\pi)][1 + \cos((z - 1)\pi)] + 1 \tag{27}$$

$$d_z(x,y) = [1 + \cos((x - 0.5)\pi)][1 + \cos((y - 1)\pi)][1 + \cos((z - 1)\pi)] + 1 \tag{28}$$

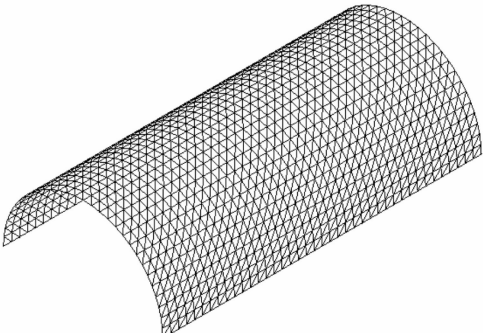
CSD、CFD 界面均为三角形单元,考虑 4 种不同密度的网格形式,见图 2.



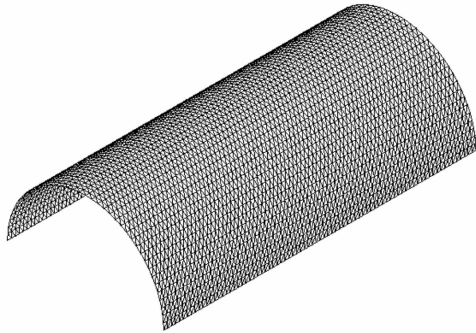
(a)网格 1:节点数 231,网格数 400



(b)网格 2:节点数 861,网格数 1 600



(c)网格 3:节点数 1 271,网格数 2 400



(d)网格 4:节点数 3 321,网格数 6 400

图 2 4 种不同密度的界面网格

根据式(26)~式(28),可求得流体界面网格点在 x 、 y 、 z 方向的位移解析解 $d_{fx,a}$ 、 $d_{fy,a}$ 、 $d_{fz,a}$;根据 RBF/FSI 算法,可求得流体界面网格点在 x 、 y 、 z 方向的数值解 $d_{fx,n}$ 、 $d_{fy,n}$ 、 $d_{fz,n}$. 流体界面每个网格点解析解、数值解的相对误差为

$$R_x = \frac{|d_{fx,a} - d_{fx,n}|}{d_{fx,a}}; \quad R_y = \frac{|d_{fy,a} - d_{fy,n}|}{d_{fy,a}} \\ R_z = \frac{|d_{fz,a} - d_{fz,n}|}{d_{fz,a}}$$

考虑一般情况下 CFD 的网格密度大于 CSD 的网格密度,做 3 组界面网格计算组合,见表 1,表中同时列出了每个组合在 x 、 y 、 z 方向的最大计算相对误差. 在 x 、 y 、 z 方向全部网格点对应的相对误差(取对数)分别绘于图 3~图 5.

表 1 位移传递计算分组及最大相对误差

分 组	界面网格形式		最大相对误差 $\max(\lg R)$		
	CSD	CFD	x 方向	y 方向	z 方向
1	网格 1	网格 2	-1.603 33	-1.706 81	-1.492 03
2	网格 2	网格 3	-2.245 12	-2.355 38	-2.088 99
3	网格 3	网格 4	-2.107 27	-2.220 12	-2.203 34

先分析 x 方向位移的计算结果:从表 1 和图 3 可以看出,对于计算分组 1、2,随着计算网格密度的增大,网格点的计算相对误差和最大相对误差在不断减小的同时,网格点相对误差的分布范围变窄,这说明计算精度随网格密度的增大而提高. 但是,对比计算分组 2、3 可以看出,对于高密度网格,计算精度

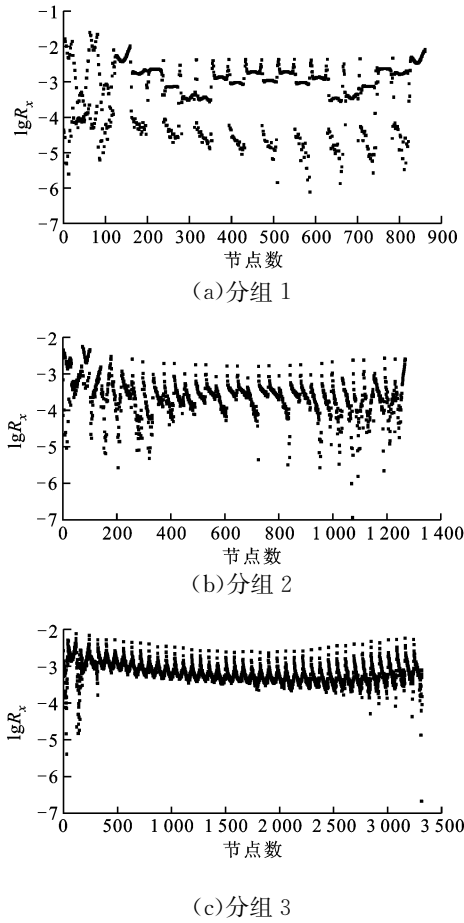


图3 x 方向节点数与对数相对误差的关系

并没有随着网格密度的增加而提高,相反却略有降低,但网格点相对误差的分布范围继续变窄.从表1和图4、图5可以看出, y 、 z 方向位移的计算结果与 x 方向位移的计算结果具有类似的性质,但对于 z 方向位移,计算精度并没有随着网格密度的增加而略有降低的现象.

随着网格密度的增加,网格面渐趋逼近壳体几何面,因此计算精度随之增加是合理的,但如表1所示,在计算分组2、3时,却出现了“反常”现象,即在采用高密度网格时,计算精度没有随网格密度的增加而提高,反而在 x 、 y 方向出现了略有降低的现象.这是因为采用能量原理进行数据传递时,需根据式(24)求得显式的传递矩阵 $\mathbf{H}$,因此存在矩阵 $\mathbf{M}$ 的求逆运算,当采用高密度网格时,大型矩阵的求逆运算导致了计算精度的不稳定.如果不采用能量守恒原理,位移、压力的传递就可以独立进行插值计算,位移的求解可不进行矩阵求逆运算,直接求解式(11)的线性代数方程组.此时,对于计算分组2、3,采用高斯消除法求得的 x 方向的最大相对误差分别为 -2.15517 和 -2.32350 , y 方向的最大相对

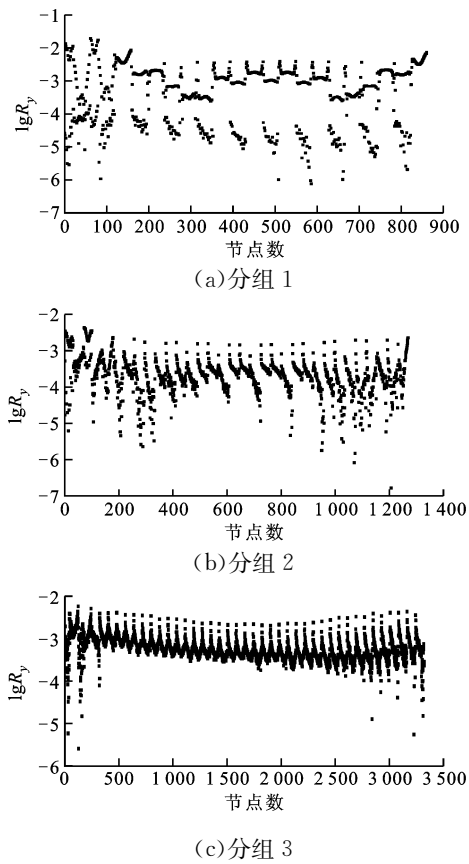


图4 y 方向节点数与对数相对误差的关系

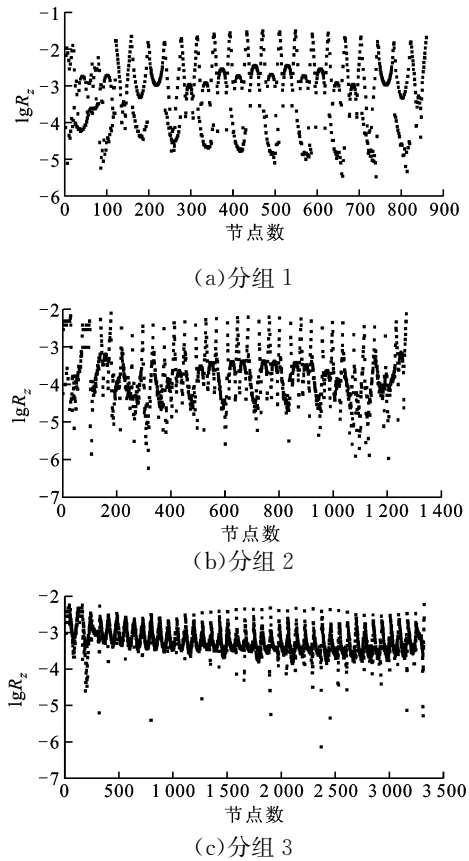


图5 z 方向节点数与对数相对误差的关系

误差分别为-2.245 77 和-2.418 18,计算结果没有出现上述的“反常”现象。

根据各分组的整体计算结果来看, x 、 y 、 z 方向绝大多数节点的位移相对误差在 $10^{-2} \sim 10^{-6}$ 之间,计算精度较高。更多的计算结果表明,在进行网格剖分时,固体、流体的界面网格边长宜分别小于耦合界面最大边长的 $1/20$ 和 $1/40$ ^[10]。

6 结 语

根据能量守恒原理,位移传递矩阵的计算在流固耦合界面信息传递中起着关键的作用。将RBF引入流固耦合分析领域,根据RBF插值和定解条件,可导出界面位移的传递矩阵,从而可实现界面位移、速度、压力等信息的传递。本文给出了进行界面信息传递的RBF/FSI理论和方法。RBF/FSI算法易于理解和应用,且计算精度较高,允许CSD、CFD采用任意网格形式,因此在CSD和CFD计算程序之间可以开发独立的界面信息传递接口程序,很容易实现弱耦合分析,具有较好的工程应用前景。

参考文献:

- [1] BUHMANN M D. Radial basis functions: theory and implementations [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [2] WU Zongmin. Multivariate compactly supported positive definite radial functions [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4(5): 283-292.
- [3] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分

程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 1-12.

WU Zongmin. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(2): 1-12.

- [4] FRANK R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. Math Comp, 1982, 38(175): 191-200.
- [5] DE BOER A, VAN ZUIJLEN A H, BIJL H. Review of coupling methods for non-matching meshes [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2007, 196(8): 1515-1525.
- [6] FARHAT C, LESOINNEA M, LETALLECB P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1998, 157(2): 95-114.
- [7] JAIMAN R K, JIAO X, GEUBELLE P H, et al. Conservative load transfer along curved fluid-solid interface with non-matching meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218(1): 372-397.
- [8] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京:科学出版社, 2007.
- [9] CEBRAL J R. Loose coupling algorithms for fluid-structure interaction [D]. Fairfax, USA: George Mason University, 1991.
- [10] 苏波. 流固耦合界面信息传递理论方法研究[D]. 上海:同济大学土木工程学院, 2009.

(编辑 葛赵青)

[西安交通大学科研成果介绍]

回转机械在线监测和故障诊断系统

回转机械在线监测和故障诊断系统以化工、石化等行业的回转机械为对象,采用先进的计算机技术、光纤传输技术和独创的全息谱监测诊断方法,全面、实时、连续地实现了机械运行状态的监测和故障诊断。在线监测和诊断系统采用高性能的光纤计算机网络,传输速率高,误码率低;在线监测和诊断系统中前端监测计算机、主监测计算机和诊断分析计算机并行工作,保证监测的连续性和实时性;多任务的系统运行环境保证了对突发事件数据和信息的捕获,实现了事故追忆功能;采用通用的网络协议,提高了系统的互联性和数据的共享能力,实现了机械故障的远程诊断。在线监测和诊断系统的诊断软件采用了以全息谱技术和神经网络智能化诊断为核心的分析软件包,全面利用了振动的幅频相信息,提高了故障诊断的准确性。

此系统已获国家发明专利,并已投入批量生产。

(来源:西安交大科技在线 <http://www.xjtust.com>)